

Szakmai zárójelentés

az F-038326 számú OTKA pályázat támogatásával elért eredményekről

A pályázat támogatásával – a kutatás munkatervében leírtaknak megfelelően – elsősorban függvényegyenletek és -egyenlőtlenségek stabilitásával, társadalomtudományi alkalmazásaival, konvexitási kérdésekkel, lineáris megőrzési, reflexivitási, valamint a Wigner-féle unitér-antiunitér tétellel kapcsolatos problémák vizsgálatával foglalkoztunk. Elért eredményeink szakfolyóiratokban való közlése valamint konferenciákon való ismertetése mellett a pályázatban részt vevő Győry Máté a pályázat témakörében 2003-ban készítette el [11]¹ PhD értekezését, s szerzett *promotio sub auspiciis praesidentis rei publicae* kitüntetéses doktori címet.

A függvényegyenletek stabilitáselméletéhez kötődően a Cauchy-féle függvényegyenletet továbbá a paralelogramma-egyenletet (más elnevezésekkel norma-négyzet vagy Jordan–von Neumann egyenletet) speciális esetként tartalmazó, úgynevezett monom-egyenletek osztályára vonatkozó feltételes és aszimptotikus stabilitási tételeket igazoltunk a [2] dolgozatban. A paralelogramma-egyenletből származtatott (korábbi eredményeink szerint azzal ekvivalens) norma-egyenlőtlenség stabilitását bizonyítottuk [3]-ban. Kaiser Zoltánnal és Páles Zsolttal közös kutatásaink új eredményeként, [5] dolgozatunkban a Cauchy egyenletre sikerült általános stabilitási tételeket igazolnunk, továbbá egy általános függvényegyenlet-osztályra vonatkozó stabilitási eredményeket bizonyítottunk, igen gyenge (kommutativitásnál és asszociativitásnál is enyhébb) feltételeket téve az egyenletben szereplő függvény értelmezési tartományán és értékkészletén értelmezett műveletekre.

A konvex függvények vizsgálata terén, a Páles Zsolttal közös, [8] dolgozatunkban magasabb rendű (Wright-)konvex függvényeket jellemeztünk általánosított deriváltak segítségével. E cikk fő eredményének egyik következménye annak a jólismert tételnek az általánosítása, mely szerint egy n -szer differenciálható valós függvény pontosan akkor $n - 1$ -edrendben konvex, ha n -dik deriváltja nemnegatív. A dolgozatban leírtak szerint ez a karakterizáció Dinghas-típusú deriváltak segítségével magasabb rendű Jensen-konvex illetve magasabb rendű Wright-konvex függvényekre (mindennemű) regularitási feltétel nélkül is elvégezhető. Az eredmény másik következménye valós függvényekre

¹Az idézett dolgozatok pontos adatai a jelentés végén található publikációs listában szerepelnek.

vonatkozó konvexitási tulajdonságok egy széles osztályának lokalizálhatósága. Részben ezen eredmények által motiválva és a függvények magasabbrendű konvexitásának T. Popoviciu által bevezetett fogalmához kötődően Páles Zsolttal közös [9] munkánkban sikerült különböző értelemben vett (szimmetrikus-, ciklikus-, Wright-, Jensen-) magasabb rendben konvex függvények néhány tulajdonságát valamint egymással való kapcsolatát leírni.

A konvex függvények elméletének egyik klasszikus eredménye az (először) 1915-ben bizonyított Bernstein-Doetsch tétel. Páles Zsolttal közösen sikerült megmutatnunk, hogy a tétel sokkal általánosabb formában, úgynevezett (M, N) -konvex függvényekre (azaz olyan függvényekre, amelyekre a klasszikus Jensen-konvexitási egyenlőtlenségnek egy olyan változata érvényes, amelyben az egyenlőtlenség bal-, illetve jobboldalán található aritmetikai közepet – egymástól esetleg különböző – bizonyos egyszerű és természetes feltételeket kielégítő, egyébként tetszőleges közepekkel helyettesítjük) is fennáll. Eredményünket az [E14] és [E15] előadásokban ismertettük, s rövidesen publikáljuk is azt. A Bernstein-Doetsch tételnek a kvázi-konvex és szigorúan kvázi-konvex függvényekre vonatkozó változatát fogalmaztuk meg és igazoltuk Páles Zsolttal és Kazimierz Nikodemmel közös, [6] dolgozatunkban.

A konvexitás E. F. Beckenbach által 1937-ben valós függvényekre bevezetett általánosítását terjesztettük ki kétváltozós függvényekre, s ilyen értelemben vett általánosított konvex függvények bizonyos folytonossággal kapcsolatos tulajdonságait igazoltuk a Mirosław Adamekkel, Kazimierz Nikodemmel és Páles Zsolttal közös, [1] munkánkban.

Egy régóta és több kutató által vizsgált összetett függvényegyenletet a korábbiaktól eltérő regularitási feltételek mellett megoldva egy haszonelméletből származó, reprezentációk egyértelműségére vonatkozó tételt igazoltunk Aczél Jánossal és Che Tat Ng-gel, [7] cikkünkben.

A jelen pályázat támogatásával Magyarországra meghívott Peter Volkmann professzorral folytatott kutatásaink keretében biadditív függvények karakterizációjával foglalkoztunk. Annak az egyszerű állításnak a megfordítását igazoltuk, hogy egy biadditív függvény mindkét változójában (a másik változót tetszőlegesen rögzítve) egy additív függvény abszolútértéke (v.ö.: [10]).

A [11] disszertációban (illetve az annak részét képező [12], [13], [14] dolgozatokban) több témakörrel is foglalkoztunk. Wigner Jenő híres unitér-antiunitér tételét – ami a kvantummechanika valószínűségi aspektusaira vonatkozó egyik legfontosabb eredmény, s amelynek számos különböző bizonyítását publikálták – teljesen új megközelítéssel, elemi módon igazoltuk. (V.ö. még [12].) A tételt sikerült kiterjesztenünk egyszerre három

irányban oly módon, hogy egy Hilbert-tér összes n -dimenziós alterének halmazán értelmezett, az alterek közötti ortogonalitást megőrző transzformációkra nyertünk eredményeket különböző feltételek mellett. (Lásd [13] is.) Egy C^* -algebra szuszpenziójának fogalma nagyon fontos szerepet játszik az operátoralgebrák K-elméletében. (Egy \mathcal{A} C^* -algebra szuszpenziója a $C_0(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$ C^* -tenzor szorzat.) Megmutattuk, hogy $C_0(\mathbb{R})$ automorfizmus- és izometriacsoportja algebrailag (de nem topologikusan) reflexív. Igazoltuk, hogy a $B(H)$ szuszpenziójának automorfizmus-csoportja és izometria-csoportja algebrailag reflexív, továbbá meghatároztuk a fenti csoportok topologikus reflexív lezártját. (V.ö.: 14.) Enyhe folytonossági feltétel mellett meghatároztuk egy Hilbert-tér korlátos lineáris operátorainak algebráján értelmezett összes olyan lineáris leképezést, amely egy adott k esetén nem növeli a k -rangot, megőrzi a k -rangot, illetve megőrzi a k -korangot, s ezzel egységesítettük és kiterjesztettük a korábbi ezirányú eredményeket. Igazoltuk a függvényalgebrák egyik legfontosabb típusára, nevezetesen $C_0(X)$ -re, hogy annak 2-lokális (szűrjektív lineáris) izometriái (szűrjektív lineáris) izometriák. Emellett karakterizáltuk a $C_0(X)$ függvényalgebra összes, a képtér átmérőjét megőrző lineáris bijekcióját.

A megőrzési problémák terén végzett vizsgálatainkat tovább folytattuk. Szlovén kollégák kutatásaihoz kapcsolódóan, azok eredményeit általánosítottuk. Meghatároztuk a fizikában jelentős szerepet játszó effekt-algebrák függvényalgebrás megfelelőinek rendezéstartó bijekcióit, megadva azok általános alakját, továbbá megvizsgáltuk ezen struktúra multiplikatív bijekcióit, s ugyancsak sikerült azokat karakterizálnunk, s megadnunk általános alakjukat. Molnár Lajos kollégánk kutatásaihoz kapcsolódóan egy, mátrix-algebrakon értelmezett megőrzési problémát oldottunk meg. Meghatároztuk azon Ψ valós értékű leképezéseket, amelyek pozitív definit mátrixokon teljesítik a $\Psi(ABA) = \Psi(A)\Psi(B)\Psi(A)$ egyenletet, s megadtuk azok alakját. Utóbbi eredményeinket - várhatóan három dolgozatban - a közeljövőben publikáljuk.

Debrecen, 2006. február 27.

Gilányi Attila
témavezető

A pályázat támogatásával készült dolgozatok

- [1] M. Adamek, A. Gilányi, K. Nikodem, Zs. Páles, *A note on three-parameter families and generalized convex functions*, közlésre benyújtva.
- [2] A. Gilányi, *On approximately monomial functions*, Functional Equations – Results and Advances (Eds. Z. Daróczy, Zs. Páles), Kluwer Academic Publishers, 2002, 99-111.
- [3] A. Gilányi, *On a problem by K. Nikodem*, Math. Inequal. Appl. **5** (2002), 707-710.
- [4] A. Gilányi, *Magasabb rendben konvex függvények (Convex functions of higher order, Hungarian)*, MTA Közgyűlési Előadások, közlésre elfogadva.
- [5] A. Gilányi, Z. Kaiser, Zs. Páles, *Estimates to the stability of functional equations*, Aequationes Math., közlésre elfogadva.
- [6] A. Gilányi, K. Nikodem Zs. Páles, *Bernstein-Doetsch type results for quasiconvex functions*, Math. Inequal. Appl. **7** (2004), 169-175.
- [7] A. Gilányi, C. T. Ng, J. Aczél, *On a functional equation arising from comparison of utility representations* J. Math. Anal. Appl. **304** (2005), 572-583.
- [8] A. Gilányi, Zs. Páles, *On Dinghas-type derivatives and convex functions of higher order*, Real Anal. Exchange, **27** (2001/2002), 485-493.
- [9] A. Gilányi, Zs. Páles, *On convex functions of higher order*, közlésre benyújtva.
- [10] A. Gilányi, P. Volkmann, *Zur Charakterisierung biadditiver Funktionen*, Seminar LV, <http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv>, közlésre elfogadva.
- [11] M. Györy, *Preserver problems and reflexivity problems on operator algebras and on function algebras*, PhD értekezés, Debreceni Egyetem, 2003.
- [12] M. Györy, *A new elementary proof of Wigner's theorem*, Rep. Math. Phys. **54** (2004), 159-167.
- [13] M. Györy, *On the transformations of all n -dimensional subspaces of a Hilbert space preserving orthogonality*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), 233-242.
- [14] M. Györy, *On the reflexivity of the isometry group of the suspension of $B(H)$* , Studia Math. **166** (2005), 287-303.

A pályázat támogatásával publikált előadáskivonatok és megjegyzések

- [15] A. Gilányi, *Dinghas-type derivatives and convexity of higher order*, Abstract, Report of Meeting, Aequationes Math. **64** (2002), 176.
- [16] A. Gilányi, *12. Remark (To Jürg Rätz's talk)*, Report of Meeting, Aequationes Math. **64** (2002), 190-191.

- [17] A. Gilányi, *13. Remark, Report of Meeting*, Aequationes Math. **64** (2002), 191.
- [18] A. Gilányi, *14. Problems, Report of Meeting*, Aequationes Math. **64** (2002), 191-193.
- [19] A. Gilányi, *On a uniqueness problem for homogeneous utility representations, Report of Meeting*, Ann. Acad. Paed. Cracoviensis, Studia Math. **2** (2002), 69-70.
- [20] A. Gilányi, *Hyers-Ulam stability of the Cauchy functional equation on power-symmetric groupoids, Abstract, Report of Meeting*, Ann. Math. Silesianae **16** (2003), 87.
- [21] A. Gilányi, *Stability theorems for conditional monomial functional equations, Abstract, Report of Meeting*, Aequationes Math. **65** (2003), 294.
- [22] A. Gilányi, Zs. Páles, *21. Remark, Report of Meeting*, Aequationes Math. **65** (2003), 312-313.
- [23] A. Gilányi, *On convex functions of higher order, Abstract, Report of Meeting*, Ann. Math. Silesianae **17** (2003), 72.
- [24] A. Gilányi, *On symmetrically convex and Wright-convex functions of higher order, Abstract, Report of Meeting*, Aequationes Math. **67** (2004), 291.
- [25] A. Gilányi, Zs. Páles, *26. Remark, Report of Meeting*, Aequationes Math. **67** (2004), 311.
- [26] A. Gilányi, *A general stability theorem for functional equations, Abstract, Report of Meeting*, Ann. Math. Silesianae **18** (2004), 68.

A pályázat támogatásával tartott előadások

- [E1] A. Gilányi, *Hyers-Ulam stability of the Cauchy functional equation on power-symmetric groupoids*, 2nd Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Hajdúszoboszló, Hungary, January 30 – February 2, 2002.
- [E2] A. Gilányi, *A MAPLE computer algebrai rendszerről*, Pallagi Gyula Matematikai Emlékverseny Kisújszállás, 2002. március 26-27.
- [E3] A. Gilányi, *Stability theorems for conditional monomial functional equations*, 40th International Symposium on Functional Equations, Gronów, Poland, August 25 – September 1, 2002.
- [E4] A. Gilányi, *Dinghas derivatives and convexity of higher order* 17th Summer Conference on Real Functions Theory, Stara Lesna, Slovakia, September 1-6, 2002.

- [E5] A. Gilányi, *On convexity of higher order* General Inequalities 8, Noszvaj, Hungary, September 15-21, 2002.
- [E6] A. Gilányi, *Dinghas derivatives and convexity of higher order*, Numbers, Functions, Equations '03, Noszvaj, Hungary, January 22-25, 2003.
- [E7] A. Gilányi, *On convex functions of higher order*, 3rd Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Bedlewo, Poland, January 29 – February 1, 2003.
- [E8] A. Gilányi, *On symmetrically convex and Wright-convex functions of higher order*, 41st International Symposium on Functional Equations, Noszvaj, Hungary, June 8-15, 2003.
- [E9] A. Gilányi, *On a functional equation arising from the comparison of utility representations*, 9th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Złockie, Poland, September 7-13, 2003.
- [E10] A. Gilányi, *A general stability theorem for functional equations*, 4th Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Mátraháza, Hungary, February 4-7, 2004.
- [E11] A. Gilányi, *Magasabb rendben konvex függvények*, Magyar Tudományos Akadémia, 2004. május 12.
- [E12] A. Gilányi, *A Hosszú-féle alternatív függvényegyenletről*, Analízis szeminárium Hosszú Miklós születésének 75. évfordulója alkalmából, Noszvaj, 2004. május 29.
- [E13] A. Gilányi, *On Wright-convex functions of higher order*, 9th International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, Cluj-Napoca–Baisoara, Romania, June 3-6, 2004.
- [E14] A. Gilányi, *On the continuity of functions convex with respect to means*, 5th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Debrecen, Hungary, June 9-12, 2004.
- [E15] A. Gilányi, *Bernstein–Doetsch theorem for (M, N) -convex functions*, 42nd International Symposium on Functional Equations, Hradec nad Moravici, Czech Republic, June 20-27, 2004.
- [E16] A. Gilányi, *On inequalities and Dinghas-type derivatives*, Conference on the Titchmarsh–Weyl function and related topics, Cardiff, United Kingdom July 19–21, 2004.
- [E17] A. Gilányi, *On asymptotically monomial functions*, 5th Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Bedlewo, Poland, February 2–5, 2005.
- [E18] A. Gilányi, *On convex functions of higher order*, 43rd International Symposium on Functional Equations, Batz-sur-Mer, France, May 15-21, 2005.

- [E19] A. Gilányi, *On convex functions of higher order*, 8th International Symposium on Generalized Convexity and Monotonicity, Varese, Italy, July 4–8, 2005.
- [E20] A. Gilányi, *Konvexe Funktionen höherer Ordnung*, Kolloquium-Vortrag, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, Germany, January 17, 2006.
- [E21] A. Gilányi, *Three-parameter families and generalized convex functions*, 6th Debrecen–Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Berekfürdő, Hungary, February 1–4, 2006.
- [E22] A. Gilányi, *On monomial functions*, 2nd International Student Conference on Analysis, Noszvaj, Hungary, February 4–7, 2006.